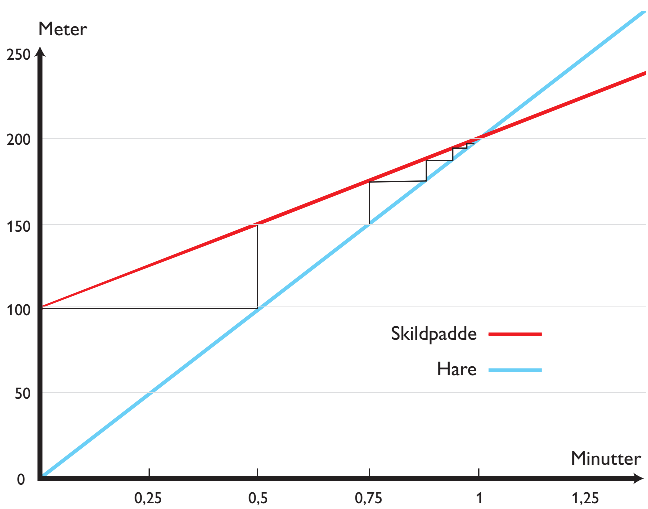
Sansernes og forstandens tvivlsomme brugbarhed

I de syditalienske byer Kroton og Elea opstod omkring 500 f.v.t. to filosofiske retninger, som fik stor betydning for senere tænkning og forskning. Den ene skole var grundlagt af Pythagoras (ca. 580-500 f.v.t.), den anden af Parmenides (ca. 515-450 f.v.t.). Pythagoras' skole var først og fremmest en matematisk skole – faktisk kommer selve betegnelsen "matematik" fra denne skole, som betegnelse for dens pensum. Parmenides' skole, hvis tilhængere kaldes eleaterne, undersøgte bl.a. logiske og meningsmæssige spørgsmål.

Eleaterne beskæftigede sig blandt andet med forholdet mellem sanseindtryk og forstand. Når nogle mennesker sagde ting som "alting er vand" eller "der findes ikke noget, som ikke er vand", udtalte de sig om forskelle og om ting, der ikke fandtes. Hvordan kunne man det? Ethvert udsagn om forskelle måtte nødvendigvis sige, at noget er til, mens noget andet ikke er til. Men ifølge Parmenides kunne man kun sige, at noget er til, og man kunne også kun sige om det, der ikke er til, at det netop ikke er til. For ham var det eksisterende en enhed, præget af manglen på forskelle. Ydermere kunne man ikke ved tænkning tage fejl, for så ville man f.eks. kunne sige om noget, der ikke var til, at det var til, hvilket var meningsløst, netop fordi det var umuligt at sige. Med andre ord var der ifølge Parmenides logiske begrænsninger knyttet til udforskningen af verden. Sansebaseret observation og erfaring var upålidelige kilder til erkendelse, og sproget var ikke i stand til at sige noget meningsfuldt om den verden, vi tilsyneladende lever i.

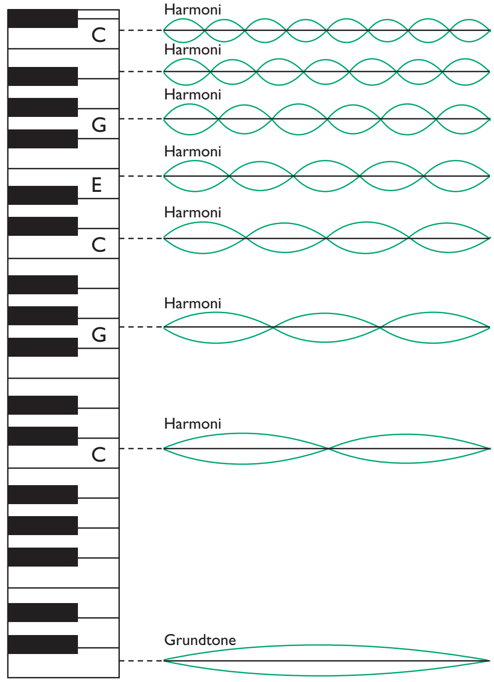
Parmenides' elev Zenon (f. ca. 490 f.v.t.) formulerede endda en række "paradokser", der skulle vise, at den tilsyneladende verden ikke kunne være den virkelige. Paradokserne knyttede sig alle til bevægelse og problemer med at beskrive bevægelse på en logisk sammenhængende måde. Zenons antagelse var, at en beskrivelse af et bestemt fænomen i verden er en beskrivelse af en tilstand, og hvis man vil beskrive overgangen fra én tilstand til en anden, må den vare et vist tidsrum. Man kunne f.eks. spørge, hvor lang tid det tog en hare at bevæge sig fra A til B, eller hvor lang tid det tog fra den startede til den nåede en hastighed på 10 km i timen. Men hvor lang tid det tog, fra den sidst stod stille, til den begyndte at bevæge sig, det kan man ikke spørge om. Eller rettere sagt kan man godt spørge, men der gives ikke noget svar. Zenon antog nu, at enhver bevægelse fra A til B måtte bestå af en række af tilstande, forstået på den måde, at der mellem tilstanden i A og tilstanden i B måtte være en række mellemliggende tilstande. Men enhver tilstand er også en stilstand, for bevægelse tager tid, og Zenon mente, at en tilstand ikke indeholdt bevægelse. En situation uden forandring ville således være at forstå som en serie af tilstande, dvs. at man forstod et tidsrum som en serie af tidspunkter. Omvendt er det jo også klart, at et tidspunkt basalt set kun kan forstås som grænsen mellem to andre tidsrum, f.eks. fortiden, fremtiden og tidspunktet, hvor de mødes, nuet. Parmenides og Zenon konkluderede, at man ikke kan stole på erfaring og observation. For man så jo ting bevæge sig, man så jo forandring. Hvis man ville erkende den egentlige virkelighed, måtte man bruge tænkning og fornuft, altså logisk analyse.

For Parmenides og Zenon var verden én og uforanderlig. Alt andet førte til logiske selvmodsigelser. For Pythagoras var verden for så vidt også én, men den var også to og tre og alle de andre tal. Pythagoras var født på Samos ved Lilleasiens kyst, men grundlagde en skole og et samfund i Syditalien. Vi kender ham først og fremmest fra den pythagoræiske læresætning, der siger noget om forholdet mellem siderne i en retvinklet trekant. Pythagoræerne undersøgte ikke blot geometriske fænomener, men også en lang række talteoretiske forhold. Men de gjorde det ved at studere konkrete strukturer i repræsentationer af talforhold, f.eks. ved at arrangere små sten i forskellige mønstre. For pythagoræerne, som for grækerne i almindelighed, var geometriske fænomener knyttet til figurer, og tal var knyttet til størrelse. Således var begge fænomener knyttet til noget, der kunne aflæses og erkendes direkte. En trekant var ikke det areal, som indesluttedes af tre



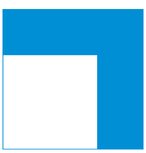
Zenon udtænkte i alt fire paradokser om problemer ved bevægelse og kontinuitet. I et af dem løber en hare og en skildpadde om kap. Skildpadden får et forspring for haren, og det betyder ifølge Zenon, at haren principielt aldrig vil kunne indhente skildpadden, da den for blot at nå op på siden af den skal igennem et uendeligt antal mellemliggende tilstande. Senere tænkning mener dog at have løst "paradokset" ved at påpege, at disse mellemliggende tilstande er tidsperioder, som konvergerer mod nul, selvom hastigheden ikke gør det.

Sammenhængen mellem matematik og musikalske harmonier blev opdaget af Pythagoras, der fandt ud af, at man kunne danne forskellige harmonier på en lyre ved at placere fingeren på positioner, der svarer til brøker af grundtonen. Her ses harmonierne, som de svarer til tonerne på et klaver.



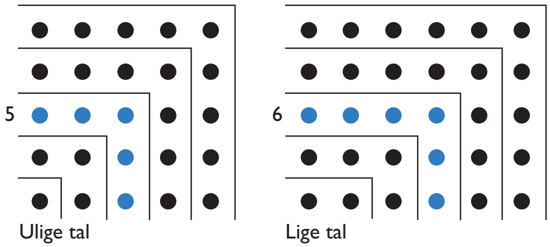
uendelige linjer, der skærer hinanden, og et tal var ikke en uendelig decimalbrøk. Et tal blev forstået som forholdet mellem to størrelser. Derudover opdagede pythagoræerne forskellige sammenhænge mellem harmoniske lydforhold og talforhold. Vi mindes om det, når vi definerer intervaller i musik ved hjælp af brøker, hvor en oktav er den tone, der fremkommer i forhold til en given tone afgivet af en streng, når strengens længde halveres.

Pythagoræerne arbejdede også med et simpelt instrument bestående af en pind vinkelret placeret på en plan placeret i Solen – dvs. en slags solur. Pindens skygge beskriver i forhold til dagens og årets gang interessante bevægelser, der knytter kosmiske fænomener sammen med geometriske i planen. Grækerne brugte ikke dette instrument til i nutidig forstand at måle eller vise tiden, men til at studere samspillet mellem de matematiske forhold, som skyggen og pinden kunne fremvise på en flad projektion. De arbejdede også med et såkaldt gnomon, der var betegnelsen for differensen mellem to kvadrater, som vist her (det blå område).



Et gnomon kunne repræsenteres med små sten eller regelmæssige punkter i et plan. Ved at se på f.eks. diagonalerne i sådanne figurer og på antallet af punkter i et gnomon, når firkanten vokser eller mindskes, kan man opdage mange talteoretiske sammenhænge. F.eks. kan man se, at kvadrattal er summen af ulige tal, altså at $1+3+5+7 = 16 = 4^2$, og at det vil gælde for alle kvadrattal, der bliver lagt op. Hvis man bruger de lige tal, bliver gnomonet aflangt, hvilket ifølge Pythagoras betyder, at de lige tal ikke er så perfekte og hellige som de ulige tal.

Pythagoræerne adskilte sig fra de naturalistiske filosoffer ved, at de sammenknyttede deres forskning med en religiøs verdensforståelse baseret på tal-

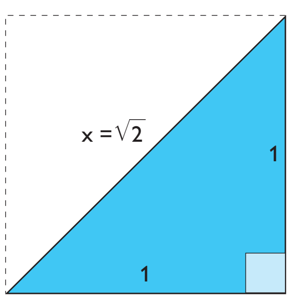


Pythagoras nåede langt med sine opdagelser i matematikken ved hjælp af gnomoner. Han brugte dem som grundenhed til at lave numeriske mønstre af forskellig størrelse. Han fandt blandt andet, at ulige tal altid fører til kvadratiske mønstre, og han kunne dermed føre et geometrisk bevis for formlen: $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$.

mystik, og ved at de ikke ønskede at leve som tænkere og forskere i et åbent samfund. I stedet isolerede de sig som medlemmer af et lukket, næsten klosteragtigt samfund. De anså tal for at være det grundlag, verden eksisterede på. De beskæftigede sig ikke med tal af praktiske hensyn, for at kunne føre regnskaber el.lign., men fordi de anså matematikken som vejen til den dybeste erkendelse. Det var ikke erfaringer, observationer eller eksperimenter, der kunne give indsigt eller viden, men derimod manipulation med symboler.

For pythagoræerne var tallene først og fremmest de hele tal. Disse tal var knyttet til størrelse, f.eks. længden af et linjestykke. To linjestykker stod i et bestemt forhold til hinanden, det vi ville repræsentere som en brøk. Brøker var forhold mellem hele tal. Et forhold mellem to brøker kunne derfor altid omformes til et forhold mellem hele tal. Et linjestykkes længde var i virkeligheden forholdet mellem linjestykket og et andet linjestykke med længden én. Det gav imidlertid pythagoræerne problemer med helt simple figurer. Vi kan f.eks. se på et kvadrat med siden 1 og forsøge at beregne længden af diagonalen. Ud fra Pythagoras' egen læresætning er længden kvadratroden af 2. Kaldes diagonalens længde for x, har vi $1^2+1^2 = x^2$.

Det interessante er nu forholdet mellem diagonal og side, x og 1. Vi kalder tallet x for $\sqrt{2}$ og ved, at det er et såkaldt irrationalt tal. Det vil sige, at det netop ikke kan udtrykkes som en brøk. Hvorfor nu ikke det? Lad os antage, at det kunne. Så ville der være et forhold $x = \frac{n}{m}$, som udtrykte det. Men Pythagoras' egen sætning ville så sige, at $\frac{n^2}{m^2} = 2$. Men det kan ikke være tilfældet, at både n og m er lige tal, for så ville vi kunne reducere brøken yderligere og netop opnå, at ikke både n og m var lige. Lad os derfor antage, at n er lige og m ulige. Så kan n skrives som 2 gange et helt tal p, og $2p^2$ er så lig m^2, der derfor er lige. Men det strider jo imod antagelsen. Hvis vi så antager, at n er ulige og m lige, kan vi gennemføre et tilsvaren-



de argument. Ergo, ligegyldigt hvad vi antager, får vi en modstrid. Det er et såkaldt indirekte bevis for, at forholdet mellem siden i et kvadrat og diagonalen ikke kan udtrykkes ved en brøk. Pythagoræerne har muligvis indset, at der var forhold mellem linjestykker, der ikke kunne udtrykkes som forhold mellem hele tal, ved at betragte en regulær femkant. Når man tegner dens diagonaler, opstår en ny femkant i midten, i hvilken man kan tegne diagonalerne, og så videre i det uendelige. Forholdet mellem den første femkants side og dens diagonal er det samme som det tilsvarende forhold i den anden og i den tredje, fjerde, og igen videre i det uendelige. Men side og diagonal bliver hele tiden mindre og mindre, de nærmer sig nul. Forholdet bliver altså også nul, troede pythagoræerne. Det ville sige, at det ikke eksisterede og egentlig skulle udtrykkes som $\frac{0}{0}$, hvilket er meningsløst. For pythagoræerne var denne opdagelse katastrofal, for den viste, at ikke alt i verden kunne udtrykkes ved hjælp af tal. Hvis vi i dag skal udtrykke tallet $\sqrt{2}$, så må vi bruge en uendelig decimal-brøk. Det er netop et tal, som aldrig kan skrives helt ud.

Matematik, geometri og regnekunst havde udviklet sig fra at være en hjælpedisciplin, der kunne løse praktiske problemer, som man ser det hos babyloniere og egypterne, til også at omfatte undersøgelser af abstrakte egenskaber hos tal og figurer. Man kunne ikke bare løse forhåndenværende problemer, men havde også forestillinger om, at påstande kunne bevises. I et bevis gør man nogle antagelser, som virker rimelige, og ud fra disse begrunder man trin for trin igennem logisk slutning den påstand, man vil bevise. Det er en aktivitet baseret på argumenter. De naturalistiske filosoffer ville også argumentere. De havde alle matematisk kunnen og indsigt. Men de ville mere end matematik, de ville udvikle teorier om de observerede naturfænomener. Hurtigt begyndte der at foreligge meget forskelligartede bud på, hvordan naturfænomener skulle forklares. Dermed var der også skabt grobund for, at man begyndte at tage selve det at udtale sig om verdens indretning op til overvejelse. Hvordan opnår man erkendelse, og hvad kan man overhovedet sige meningsfuldt? Heraklit gav ét bud på verdens væsen, Parmenides og Zenon et helt andet, og sidstnævnte hævdede endda, at man slet ikke kunne stole på sine sanser. Pythagoræerne anså alene den rene tænkning – ren fordi den var ubesmittet af sanserne – for en kilde til erkendelse.